Geometrija 2

Zadaci za vežbu

Master program: Matematika i informatika

Državni univerzitet u Novom Pazaru

1. Prava sadrži tačke $A(2,0)$ i $B(0,-1)$.
(a) Napisati jednačinu prave AB u afinim koordinatama.
(b) Naći homogene koordinate tačaka A i B u sistemu koji je pridružen datom afinom koordinatnom sistemu.
(c) Naći jednačinu prave AB u homogenim koordinatama.
(d) Naći koordinate beskonačno daleke tačke koja je dodata pravoj AB.

2. Naći sliku prave AB iz zadatka 1. pri afinoj transformaciji

$$\begin{aligned}\lambda\xi_1 &= c_{11}\xi_1' + c_{12}\xi_2' + c_{13}\xi_3'\\ \lambda\xi_2 &= c_{21}\xi_1' + c_{22}\xi_2' + c_{23}\xi_3'\\ \lambda\xi_3 &= c_{31}\xi_3'\end{aligned}$$

3. Naći beskonačno daleke tačke koje pripadaju krivim drugog reda:
(a) $x_1^2 - 4x_2^2 = 1$,
(b) $x_1^2 = x_2$,
(c) $4x_1^2 + x_2^2 = 1$,
ako su (x_1, x_2) afine koordinate tačaka.

4. Date su ravni:

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + 7 &= 0,\\ 2x_1 - 6x_2 - 5 &= 0\end{aligned}$$

u afinom koordinatnom sistemu $Ox_1x_2x_3$. Naći beskonačno daleke tačke koje pripadaju i jednoj i drugoj ravni.

5. Za tri tačke A, B, C projektivne prave $\mathcal{P}^1$ date su homogene koordinate ovih tačaka u dva homogena koordinatna sistema

$$\begin{array}{ccc} A & (1:0) & (1:1)\\ B & (0:1) & (1:0)\\ C & (3:2) & (0:1)\ . \end{array}$$

Naći formule za transformaciju jednog u drugi koordinatni sistem.

6. U projektivnoj transformaciji prave $\mathcal{P}^1$ njene tačke $A(1:0)$, $B(0:1)$, $C(3:2)$ preslikavaju se redom u tačke $A'(1:1)$, $B'(1:0)$ i $C'(0:1)$. Naći fiksne tačke ove projektivne transformacije.

7. Ispitati medjusobni položaj prave $\mathcal{P}^1$:

$$\begin{aligned} 3\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 &= 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 &= 0 \end{aligned}$$

i ravni $\mathcal{P}^2$

$$5\xi_1 + \xi_4 = 0 \ .$$

8. Dokazati da Fanova ravan nije Dezargova ravan.

9. Dat je pravougaonik $ABCD$ u euklidskoj ravni i tačke G, H, E, F redom na stranicama AB, AD, CD, BC takve da su prave AC, EH, GF paralelne. Dokazati da su tada prave BD, GH, EF konkurentne.

10. Dati su centar S, osa s i protivosa u homologije. Konstruisati sliku trougla ABC u ovoj homologiji, ako trougao ABC zadovoljava uslove:
(a) nema zajedničkih tačaka sa protivosom u;
(b) $C \in u$, $A, B \in s$;
(c) $C \in s$, $A, B \in u$.

11. Afina homologija je zadata osom s i parom odgovarajućih tačaka A i A'. Konstruisati sliku kvadrata $ABCD$ ako su:
(a) sve stranice kvadrata u kosom položaju prema osi s;
(b) tačke A, B, A' kolinearne;
(c) prave AB i s su paralelne.

12. Afina homologija je zadata osom s i parom odgovarajućih tačaka S i S'. Odrediti sliku kruga čiji je centar data tačka S.

13. Homologija je zadata osom s, centrom V i parom odgovarajućih tačaka S i S'. Odrediti sliku kruga čiji je centar data tačka S.

Primer Date su prave

$$\begin{aligned} \Pi \ : \quad 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 0 \\ \Pi' : \quad -\xi_1' + \xi_2 + \xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

i tačka $O(0:0:1)$ u projektivnoj ravni $\mathcal{P}^2$. Napisati formule za centralnu projekciju prave Π na pravu Π' iz tačke O.

Rešenje: Koristićemo matričnu notaciju kako bismo izbegli indekse. Neka su $(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$ homogene koordinate proizvoljne tačke $M \in \Pi$, a $(\xi_1' : \xi_2' : \xi_3')$ homogene koordinate proizvoljne tačke $M' \in \Pi'$. Prava Π je odredjena tačkama

$U_1(0:1:1)$ i $U_2(1:0:2)$ i zato je možemo predstaviti u obliku

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi^T = \mu_1 u_1^T + \mu_2 u_2^T = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \tag{1}$$

gde su $u_1(0,1,1)$ i $u_2(1,0,2)$ predstavnici koordinata redom tačaka U_1 i U_2. Slično prava Π' je odredjena tačkama $V_1(1:1:0)$ i $V_2(1:0:1)$, pa je predstavljamo na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix} = \xi'^T = \mu_1' v_1^T + \mu_2' v_2^T = \mu_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{2}$$

gde su $v_1(1,1,0)$ i $v_2(1,0,1)$ predstavnici redom tačaka V_1 i V_2. Ako je $A' \in \Pi'$ projekcija tačke $A \in \Pi$ sa centrom O, tada su A, O i A' kolinearne tačke i važi:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_3^0 \end{pmatrix} = \alpha \xi^T + \beta \xi'^T \ , \quad \xi_3^0 \neq 0 \ . \tag{3}$$

Kako tačka O ne pripada ni pravoj Π ni pravoj Π' to mora biti $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$. Označimo sada $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ i nakon smene (1) i (2) u (3) odbacimo treću koordinatu, jer će njome zadata nejednakost

$$\alpha(\mu_1 + 2\mu_2) + \beta\mu_2' = \xi_3^0 \neq 0$$

biti ispunjena, pošto znamo da rešenje sistema (tj. projekcija) postoji za svaku tačku $A \in \Pi$. Dobijamo sledeći sistem dve jednačine sa dve nepoznate μ_1' i μ_2', za koji znamo da ima jedinstveno rešenje (tačku $A' \in \Pi'$) za sve μ_1 i μ_2 tj. za svaki original $A \in \Pi$

$$\mu_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \left(\mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

On se može predstaviti u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} .$$

Iz poslednje jednačine množenjem s leva odgovarajućom inverznom matricom konačno dobijamo

$$\begin{pmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} .$$